

Círculo de Error Probable y Exactitud de Posicionamiento Vertical.

Arellano Sánchez Javier
Bernal Ramos Eduardo
Cabrera Castruita Esteban Jósbel
González Franco Guido Alejandro
Medina Parra Francisco Javier
Rentería García María Esther
Tenorio Zamarripa José Valentín

I. Antecedentes

El INEGI (Instituto Nacional de Estadística y Geografía) a través de la Dirección General de Geografía y Medio Ambiente (DGGMA) densifica y da mantenimiento, mediante Levantamientos Geodésicos (LG), a la Red Geodésica Nacional (RGN), además de brindar apoyo geodésico terrestre para procesos fotogramétricos y generar puntos geodésicos para evaluación de la calidad de productos geográficos.

Los productos e insumos que se generan consisten en Estaciones Horizontales (EH), Puntos para fines especiales (Pfe): Puntos de Control Terrestre (PCT) y Puntos para evaluación de la calidad (Pec), a partir de datos captados mediante el Sistema Global de Navegación por Satélite (GNSS), todos los anteriores se constituyen como objetos espaciales y tienen una georreferenciación con representación puntual. Las EH cumplen con la generación de uno de los conjuntos señalados en el en el Artículo 26 de la Ley del Sistema de Información Estadística y Geográfica (SNIEG); dentro de esta misma Ley el Artículo 99 mandata contribuir con el servicio público de información estadística y geográfica el cual pone a disposición de los usuarios información de la Red Geodésica Nacional (RGN) declarada como información de interés nacional, con el objeto de que sus estudios geográficos se vinculen a ella. Por su parte, los PCT son necesarios para el proceso de aerotriangulación, y los Pec son útiles en la evaluación de la calidad de los productos geográficos.

Los productos e insumos anteriores deben cumplir con las especificaciones técnicas de la Norma Técnica del Sistema Geodésico Nacional (NTSGN), la Norma Técnica de Estándares de Exactitud Posicional (NTEEP), el Diccionario de Datos de la Red Geodésica Nacional (DDRGN) y la Norma Técnica para la elaboración de Metadatos Geográficos (NTM).

La NTSGN (INEGI, 2010) tiene por objeto establecer las disposiciones mínimas que definen el Sistema Geodésico Nacional, a partir de las cuales es posible integrar el Marco de Referencia Geodésico, a fin de establecer las condiciones necesarias para que el Marco sea homogéneo, compatible y comparable; tomando en cuenta las mejores prácticas internacionales. En su Artículo 10 se establece que toda Estación Geodésica perteneciente a un levantamiento geodésico horizontal, deberá estar referida al Marco de Referencia Terrestre Internacional definido por el Servicio Internacional de Rotación Terrestre y de Sistemas de Referencia para el año 2008, con datos de la época 2010.0, denominado ITRF08 época 2010.0, asociado al elipsoide de referencia definido en el GRS80. Este es el Marco de Referencia oficial para los Estados Unidos Mexicanos.

La NTEEP (INEGI, 2010) tiene por objeto establecer las disposiciones mínimas referentes a los estándares de exactitud posicional que deberán adoptarse para todo trabajo de levantamiento de posicionamiento de rasgos ubicados sobre o cerca de la superficie de la Tierra dentro del Territorio Nacional, realizado por el Instituto y las Unidades del Estado que integran el Sistema Nacional de Información Estadística y Geográfica, ya sea por sí mismas o por terceros, así como promover su armonización y homogeneidad. En esta norma se establecen dos estadísticos para representar la

exactitud del posicionamiento horizontal y vertical; en el horizontal será mediante el Círculo de Error Probable (CEP) y en el vertical mediante la Exactitud de Posicionamiento Vertical (EPV), ambos con valores expresados en metros.

El DDRGN contiene los nombres, definiciones y las características de los objetos espaciales, que descritos bajo especificaciones comunes dan lugar a la generación de datos espaciales, en esta normativa cada objeto de la RGN se describe en términos de su definición, sus atributos y sus dominios de valores, así como su representación espacial y las restricciones de integridad.

Respecto a la NTM se atienden las disposiciones mínimas para la elaboración de metadatos de los datos geográficos con base en la Guía Metodológica para la Generación e Integración de Metadatos Geográficos.

Adicionalmente, en el año 2015 se desarrolló la Norma para el Aseguramiento de la Calidad de la Información Estadística y Geográfica del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, en esta norma el Artículo 4, define en su fracción XI que un indicador de Calidad es una medida cualitativa o cuantitativa que proporciona información sobre la calidad de un producto o proceso. En este sentido y en función de todo lo anterior se presentan en este documento la propuesta para formalizar los dos indicadores que se han venido aplicando dentro de las estaciones generadas en la Red Geodésica Horizontal (RGH): Círculo de Error Probable al 95% (**CEP₉₅**) y Exactitud de Posicionamiento Vertical al 95% (**EPV₉₅**), para sustentar la calidad posicional de EH, PCT y Pfe.

I. Etapas y actividades de los LG en la Red Geodésica Horizontal (RGH).

Los insumos necesarios para el cálculo de los indicadores que se proponen requieren previamente de LG dentro de los cuales se realiza una serie de etapas y actividades –conforme se describe en la Guía metodológica de la Red Geodésica Horizontal (INEGI, 2017)– desde la elaboración de proyectos hasta su validación, donde se va comprobando el cumplimiento de especificaciones normativas.

En la RGH los LG, dentro del Programa de Información del Marco de Referencia Geodésico (PIMRG), tienen como propósito la determinación de coordenadas geográficas tridimensionales sobre sitios convenientemente seleccionados, utilizando métodos comprobados de medición, bajo estándares de exactitud posicional para el mantenimiento y densificación de la propia red y proveer insumos a proyectos cartográficos y de referencia particular, así como para evaluación de la calidad de diversos productos geográficos.

La primera etapa consiste en la elaboración del proyecto (Figura 1) donde se planea y diseña la captación de datos de acuerdo con la naturaleza específica de este.

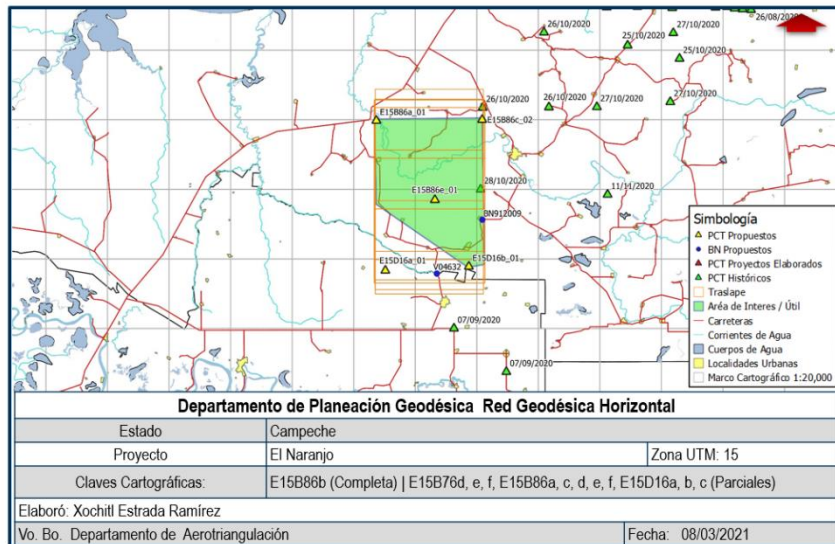


Figura 1. Presentación gráfica del diseño de un proyecto para LG de Puntos de Control Terrestre con tecnología GNSS.



La siguiente etapa involucra la captación de datos GNSS. En campo se realiza la localización de los sitios de interés (Figura 2), en algunos casos apoyándose con imágenes de percepción remota, descripciones de estaciones horizontales preestablecidas, croquis, etcétera.



Figura 2. Detalle gráfico de algunos sitios localizados para captar datos GNSS.

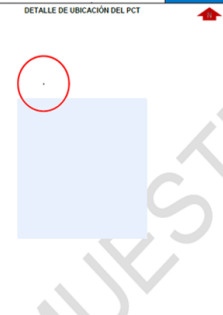
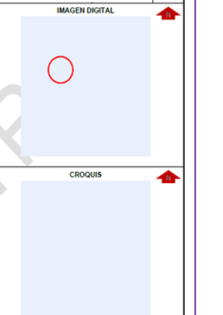
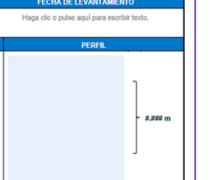
Para la etapa de levantamiento en el sitio de interés, se comprueban las condiciones de observación y se preparan los equipos, accesorios y formatos de trabajo. Se configura el equipo conforme al método de medición y se inicia la captación de datos GNSS. Durante el levantamiento se registra información complementaria, tales como fotografías del sitio, elaboración de croquis, llenado de formatos de registro e identificación (Figuras 3 y 4), etcétera.

Concluido el levantamiento se respalda los datos captados para su posterior procesamiento y ajuste.

DIRECCIÓN GENERAL DE GEOGRAFÍA Y MEDIO AMBIENTE DIRECCIÓN DEL MARCO GEODÉSICO - SUBDIRECCIÓN DE CONTROL DE OPERACIONES GEODÉSICAS DEPARTAMENTO DE PLANEACIÓN GEODÉSICA FORMATO DE REGISTRO DE OBSERVACIONES			
NOMBRE DEL TRABAJO (CLAVE PCT BRN OTRO) :		DÍA JULIANO SEMANA GPS - ERA GPS	
FECHA		RESPONSABLES DEL LEVANTAMIENTO	
LUGAR: _____			
MUNICIPIO: _____			
ESTADO: _____			
PROYECTO		MÉTODO DE LEVANTAMIENTO	
PCT () ONDIBN () RESPEC () OTRO ()		ESTRUCO () CENMATOCTRO () ESTRUCO SÁMPO ()	
NOMBRE		CLAVE	
COORDENADAS DE LA ESTACIÓN		ALTIMETRIA	
LATITUD		LONGITUD	
N		W	
METROS		METROS	
HORA INICIO (UTC)		HORA FINAL (UTC)	
HORA INICIO (LOCAL)		HORA FINAL (LOCAL)	
CLAVE DE IMAGEN DIGITAL		VIA DE COMUNICACIÓN	
EQUIPO DE MEDICIÓN		BLUETOOTH ()	
CABLE ()		FUENTE DE ENERGÍA	
MARCA		BATERÍA ()	
MODELO		CARGA DE INICIO ____% FINAL ____%	
NO.		CARGA DE INICIO ____% FINAL ____%	
ALTIMETRIA DE LA MARCA SOBRE () O BAO () TERRENO () METROS		ALTIMETRIA A MEDIA SESIÓN	
ALTIMETRIA FINAL		ALTIMETRIA FINAL PARA EL PROCESO: METROS	
CONSTANTE DE GANCHO MEDIDOR DE ALTURA 0.300 METROS		ALTIMETRIA VERTICAL PARA EL PROCESO: METROS	
CROQUIS DE PLANTA DE LA ESTACIÓN		CROQUIS DE ANTENA	
			
OBSERVACIONES:			
DÍA DE LA SEMANA GPS: DOMINGO 0, LUNES 1, MARTES 2, MIÉRCOLES 3, JUEVES 4, VIERNES 5, SÁBADO 6			

RESUMEN DE RASTRO SATELITAL			
INICIO NAVSTAR GPS	TERMINO NAVSTAR GPS	INICIO GLOPASS	TERMINO GLOPASS
SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT	SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT	SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT	SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT
1.G. * * *	1.G. * * *	1.R. * * *	1.R. * * *
2.G. * * *	2.G. * * *	2.R. * * *	2.R. * * *
3.G. * * *	3.G. * * *	3.R. * * *	3.R. * * *
4.G. * * *	4.G. * * *	4.R. * * *	4.R. * * *
5.G. * * *	5.G. * * *	5.R. * * *	5.R. * * *
6.G. * * *	6.G. * * *	6.R. * * *	6.R. * * *
7.G. * * *	7.G. * * *	7.R. * * *	7.R. * * *
8.G. * * *	8.G. * * *	8.R. * * *	8.R. * * *
9.G. * * *	9.G. * * *	9.R. * * *	9.R. * * *
10.G. * * *	10.G. * * *	10.R. * * *	10.R. * * *
11.G. * * *	11.G. * * *	11.R. * * *	11.R. * * *
12.G. * * *	12.G. * * *	12.R. * * *	12.R. * * *
13.G. * * *	13.G. * * *	13.R. * * *	13.R. * * *
14.G. * * *	14.G. * * *	14.R. * * *	14.R. * * *
15.G. * * *	15.G. * * *	15.R. * * *	15.R. * * *
INICIO Galileo	TERMINO Galileo	INICIO BeiDou	TERMINO BeiDou
SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT	SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT	SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT	SATELITE / ELEVACIÓN / AZMUT
1.E. * * *	1.E. * * *	1.C. * * *	1.C. * * *
2.E. * * *	2.E. * * *	2.C. * * *	2.C. * * *
3.E. * * *	3.E. * * *	3.C. * * *	3.C. * * *
4.E. * * *	4.E. * * *	4.C. * * *	4.C. * * *
5.E. * * *	5.E. * * *	5.C. * * *	5.C. * * *
6.E. * * *	6.E. * * *	6.C. * * *	6.C. * * *
7.E. * * *	7.E. * * *	7.C. * * *	7.C. * * *
8.E. * * *	8.E. * * *	8.C. * * *	8.C. * * *
9.E. * * *	9.E. * * *	9.C. * * *	9.C. * * *
10.E. * * *	10.E. * * *	10.C. * * *	10.C. * * *
11.E. * * *	11.E. * * *	11.C. * * *	11.C. * * *
12.E. * * *	12.E. * * *	12.C. * * *	12.C. * * *
13.E. * * *	13.E. * * *	13.C. * * *	13.C. * * *
14.E. * * *	14.E. * * *	14.C. * * *	14.C. * * *
15.E. * * *	15.E. * * *	15.C. * * *	15.C. * * *
REPORTE DE PROBLEMAS Y SOLUCIÓN			

Figura 3. Formato de registro de observaciones GNSS

DIRECCIÓN GENERAL DE GEOGRAFÍA Y MEDIO AMBIENTE ELIGE UNIDAD ADMINISTRATIVA			
FORMATO DE IDENTIFICACIÓN DE PUNTO DE CONTROL TERRESTRE (PCT)			
COORDENADA GEOGRÁFICA ITRF 08 ÉPOCA 2016.0	LATITUD: 00°00'00.000" N	COORDENADA UTM ESTAD. ÉPOCA 2016.0	NORTE: 000000.000 m ESTE: 000000.000 m ZONA UTM
ALTURA ELIPSOIDAL: 0000.000 m	ALTURA ORTOMÉTRICA: 0000.000 m	SE	
DETALLE DE UBICACIÓN DEL PCT		IMAGEN DIGITAL	
			
PROYECTO		FECHA DE LEVANTAMIENTO	
CLAVE DEL PCT		PERFIL	
DESCRIPCIÓN			

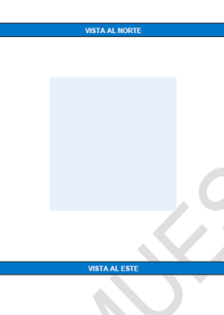
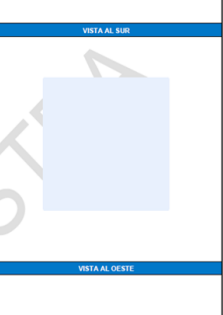


OBSERVACIONES	
Haga clic o pulse aquí para escribir texto.	
VISTA AL NORTE	VISTA AL SUR
	
VISTA AL ESTE	VISTA AL OESTE
	

Figura 4. Ejemplo de formato de identificación de un PCT.

En la etapa de procesamiento, previamente se obtienen: datos de las estaciones de la Red Geodésica Nacional Activa o Pasiva, todos los datos captados en tiempos comunes son convertidos a un archivo de intercambio (Figura 5) denominado RINEX¹ (Receiver Independent Exchange Format), coordenadas de referencia de control geodésico en la época del levantamiento, así como información complementaria de apoyo no registrada de manera automática durante el

¹ Son las siglas de un formato de intercambio de información GPS1. En 1989 fue recomendado por la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) como formato estándar de intercambio de archivos GPS.

levantamiento. Los archivos RINEX se componen de la creación de cuatro tipos de archivos: archivo de datos de observación, archivo de datos meteorológicos, archivo con el mensaje de navegación y el archivo del mensaje de navegación de los sistemas satelitales (NAVTAR, GLONASS, GALILEO, BeiDOU). (mettatec, 2023)

3.02	OBSERVATION DATA	M: MIXED	RINEX VERSION / TYPE
LgsRinex v1.10.5.0		20210814 235105 UTC	PGM / RUN BY / DATE
SNR is mapped to RINEX snr flag value [1-9]			COMMENT
LX: < 12dBHz -> 1; 12-17dBHz -> 2; 18-23dBHz -> 3			COMMENT
24-29dBHz -> 4; 30-35dBHz -> 5; 36-41dBHz -> 6			COMMENT
42-47dBHz -> 7; 48-53dBHz -> 8; >= 54dBHz -> 9			COMMENT
CAN_200			MARKER NAME
0000			MARKER NUMBER
			OBSERVER / AGENCY
3610334	LEICA GS18	5.50/7.701	REC # / TYPE / VERS
	LEIUnknown	NONE	ANT # / TYPE
334591.4597 -5945187.0762 2277802.8801			APPROX POSITION XYZ
2.5270 0.0000 0.0000			ANTENNA: DELTA H/E/W
G 16 C1C L1C D1C S1C C2S L2S D2S S2S C2W L2W D2W S2W C5Q			SYS / # / OBS TYPES
L5Q D5Q S5Q			SYS / # / OBS TYPES
R 12 C1C L1C D1C S1C C2P L2P D2P S2P C2C L2C D2C S2C			SYS / # / OBS TYPES
E 16 C1C L1C D1C S1C C5Q L5Q D5Q S5Q C7Q L7Q D7Q S7Q C8Q			SYS / # / OBS TYPES
L8Q D8Q S8Q			SYS / # / OBS TYPES
C 8 C1I L1I D1I S1I C7I L7I D7I S7I			SYS / # / OBS TYPES
DBHZ			SIGNAL STRENGTH UNIT
5.000			INTERVAL
2021 08 14 16 11 55.0000000	GPS		TIME OF FIRST OBS
2021 08 14 17 18 25.0000000	GPS		TIME OF LAST OBS

Figura 5. Detalle de archivo de datos de observación RINEX.

En esta misma etapa se tiene determinado el procesamiento de los datos (Figura 6) considerando las deformaciones del marco geodésico en el tiempo para la obtención de coordenadas en el marco y época oficial, para cumplir con el orden de exactitud posicional señalado en la NTEEP.

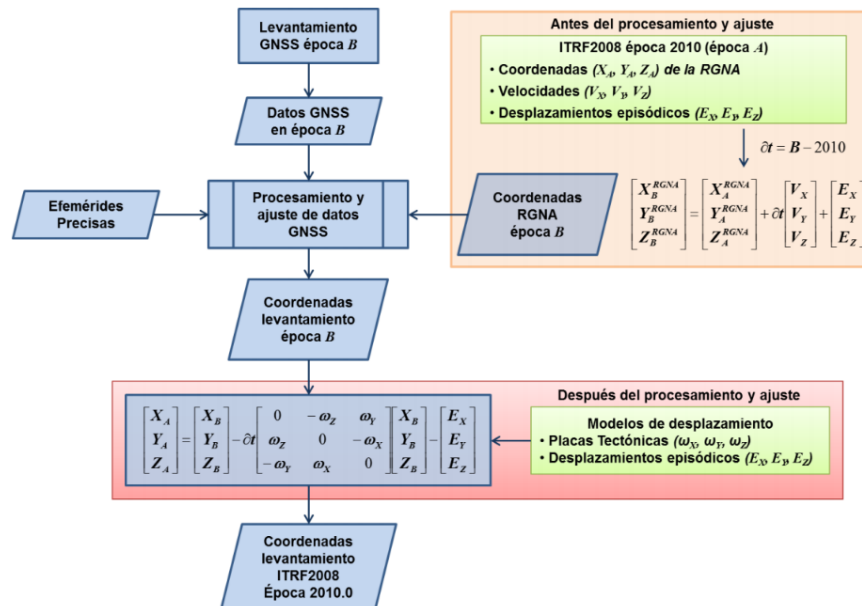


Figura 6. Diagrama del procesamiento y ajuste de datos GNSS.

En la actividad de Procesamiento y ajuste de datos GNSS, se realiza un proceso para transformar los datos de observación GNSS a las coordenadas geodésicas y se obtienen sus desviaciones estándar que se utilizan para el cálculo de los indicadores propuestos.

En cada etapa se van integrando datos e información para conformar un expediente por cada proyecto, para su resguardo en medios electrónicos como parte del aseguramiento de la información y transparencia administrativa, así como para fines de documentación de la Información de Interés Nacional.

II. Los estándares de exactitud posicional

a. Objetivo y alcances.

Los estándares de clasificación en la RGH se basan en el término adoptado de exactitud, mediante el cual se clasifican los valores (coordenadas) de puntos en un determinado levantamiento geodésico. En este sentido los indicadores se orientan a la exactitud posicional de puntos convenientemente elegidos en un sistema de referencia, para representar la proximidad entre los valores reportados con respecto a valores considerados como verdaderos.

Según el IPGH (2019) en la Norma Internacional ISO 5725-1 (ISO 1994) se describe la exactitud de un método de medición con base en los términos veracidad y precisión; la veracidad considera la cercanía de la media aritmética de una gran cantidad de resultados de ensayos y el valor verdadero o el valor de referencia aceptado, mientras que la precisión se refiere a la proximidad de la concordancia entre los diferentes resultados sin relación con el valor verdadero o de referencia aceptado.

En función de lo anterior el objetivo de los indicadores propuestos es declarar la exactitud de un posicionamiento horizontal con el 95% de confianza para informar al usuario el orden de exactitud de los productos e insumos generados dentro de la RGH, para su análisis, evaluación y determinación de su actitud de uso en los proyectos vinculados al Sistema Geodésico Nacional.

b. Determinación de las exactitudes

CEP

De acuerdo con Webb (2012) el Círculo de Error Probable o CEP por sus siglas en inglés, se utiliza para definir la calidad de un posicionamiento sobre la superficie terrestre. El CEP es un círculo con un radio específico que, por definición, contiene el 50% de probabilidad de que se encuentre el valor verdadero y se calcula por medio de la relación $CEP = 0.5887(\sigma\varphi + \sigma\lambda)$, considerando las desviaciones estándar magnitud similar. Bajo el supuesto de que las mediciones relacionadas con la latitud y la longitud son independientes con distribución normal bivariada, se determina el percentil que determina el indicador **CEP₉₅**; es decir, el Círculo Error Probable con 95% de confianza.

EPV

El indicador **EPV₉₅** (Exactitud Posicional Vertical) se usa para medir la calidad de los datos de altura sobre la superficie terrestre. El EPV es una incertidumbre lineal en el que se tiene un 95% de probabilidad de que se encuentre el valor verdadero, considerando que los datos tienen una distribución normal. Típicamente la incertidumbre del EPV es mayor que el CEP al 95% (Sickle 2015).

c. Estándar de Exactitud Posicional

Conforme a la NTEEP (INEGI 2010) en su Artículo 9 se definen dos órdenes de exactitud posicional horizontal para la Red Geodésica Nacional:

- I. Orden de 5 centímetros. - Deberá aplicarse a los trabajos encaminados a establecer el sistema geodésico de referencia nacional fundamental RGNA, así como a cualquier levantamiento geodésico que requiera una exactitud posicional en este orden;
- II. Orden de 1 decímetro. - Se destinará a levantamientos geodésicos de densificación del sistema de referencia geodésico nacional básico, así como a cualquier levantamiento geodésico que requiera una exactitud posicional en este orden. Los trabajos que se hagan dentro de este orden podrán incorporarse a la RGNP.

III. Aspectos técnicos de los Indicadores de calidad.

III.1 CEP₉₅

En la teoría de la probabilidad y estadística, la distribución de Rayleigh es una función de distribución continua, la cual se suele presentar cuando un vector bidimensional (por ejemplo, el que representa la velocidad del viento) tiene dos componentes ortogonales, independientes y siguen una distribución normal (Sánchez, s.f.).

Relación entre la distribución de Rayleigh y la distribución Normal.

Si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución normal de media cero y misma σ , entonces la variable aleatoria:

$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ sigue una distribución de Rayleigh con función de densidad:

$$f(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-z^2/2\sigma^2} \quad \text{para } z \geq 0$$

En general si $X \rightarrow N(\mu_x, \sigma_x)$ y $Y \rightarrow N(\mu_y, \sigma_y)$ y si X e Y son independientes, entonces la variable bidimensional (X,Y) sigue la distribución normal bivariada (Sánchez, s.f.)

La definición de CEP involucra la solución de una integral en términos del radio del círculo, igualando la integral a una probabilidad de 0.50. En otras palabras, si $f(x, y)$ tiene la forma de la distribución bivariada, entonces el CEP se calcula a partir de la ecuación 1 (Moran, 1966).

$$0.50 = \iint_{C_R} f(x, y) dx dy$$

C_R designa un círculo de radio R (CEP)
 $f(x, y)$ es la función de densidad de probabilidad.

Ecuación 1. Función de Distribución de Probabilidad (FDP) al 50%

Considerando lo anterior, el cálculo para el CEP se encuentra integrando la ecuación indicada y resolviendo para R. De esta manera, la función de densidad de probabilidad $f(x, y)$, se **distribuye** de manera **Normal** con parámetros μ_x, μ_y y σ_x, σ_y

$$f(x, y) \sim N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y)$$

Ecuación 2. Función de Densidad de Probabilidad $f(x, y)$

Entonces, el CEP al 50% se obtiene a partir de la distribución de probabilidad normal bivariada, la cual se compone de dos variables aleatorias independientes que se distribuyen normalmente y tienen una distribución normal conjunta. La ecuación para resolver es entonces:

$$0.50 = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \iint_{C_R} e^{-1/2(1-\rho^2)\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]} dx dy$$

Ecuación 3. Función de Distribución de Probabilidad normal estándar bivariada al 50%

Donde:

- x valor de la variable aleatoria x
- y valor de la variable aleatoria y
- μ_x media poblacional de la variable aleatoria X
- μ_y media poblacional de la variable aleatoria Y
- σ_x desviación estándar de la población de la variable aleatoria X
- σ_y desviación estándar de la población de la variable aleatoria Y
- ρ coeficiente de correlación entre las variables aleatorias X, Y

Para el indicador CEP se asume:

$$\begin{aligned} \rho &= 0 \\ \mu_x &= 0 \\ \mu_y &= 0 \\ \sigma_x &= \sigma_y = \sigma \end{aligned}$$

- Asumimos que la desviación estándar es igual en ambas variables y por lo tanto utilizamos un solo valor de sigma.
- Se asume que las dos medias μ_x, μ_y son iguales a cero, significa que los datos no tienen sesgo, y las medias generales de los errores se ubican en el punto (0,0) o justo en el objetivo.

Dado que las desviaciones estándar son iguales, el resultado es una distribución normal bivariada circular como se muestra en la figura 7.

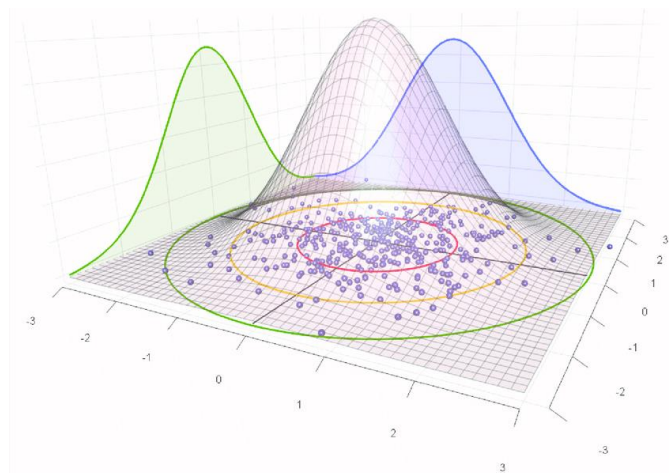


Figura 7. Distribución Normal Bivariada Circular. Fuente: Internet

La doble integral se reduce a la siguiente expresión

$$0.50 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \iint_S e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2+y^2]} dx dy$$

Ecuación 4. FDP normal estándar bivariada (reducida) al 50%

Donde e=Euler 2.71828 es la base del logaritmo natural y S define la región dentro de la cual se encuentra el 50% de las observaciones.

Transformando a coordenadas polares para obtener los componentes del vector, se tiene:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

Donde $0 \leq r \leq R$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Sustituyendo en la ecuación 4

$$0.50 = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R e^{-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)[r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta]} r dr d\theta$$

Resolviendo las integrales y aplicando límites:

$$0.50 = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$$

Ecuación 5. Resultado de integrar la ecuación 4.

Despejando R

$$R = 1.1774\sigma$$

$$\mathbf{CEP50 = 1.1774\sigma}$$

Ecuación 6. Círculo de Error Probable al 50% con una sigma

Por lo tanto, el CEP poblacional se obtiene multiplicando la desviación estándar común de la población por una constante de 1.1774.

De acuerdo con Ruiz-Lendinez, Ariza-López y Ureña-Cámara (2019) cuando los errores (desviaciones estándar) no son iguales, la National Standard for Spatial Data Accuracy (NSSDA), si $0.6 < (RMSE_{min}/RMSE_{max}) < 1$, y los errores se encuentran normalmente distribuidos y son independientes entonces se promedian (ecuación 7).

$$CEP50 = 1.1774 \left(\frac{\sigma_{lat} + \sigma_{long}}{2} \right) = \frac{1.1774}{2} (\sigma_{lat} + \sigma_{long})$$

$$CEP50 = 0.5887(\sigma_{lat} + \sigma_{long})$$

Ecuación 7. CEP50 con sigmas de latitud y longitud

Aplicando el mismo cálculo a la ecuación 5 para CEP₉₅, despejando R

$$0.95 = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}$$

$$R = 2.44774\sigma$$

$$CEP_{95} = 2.44774\sigma$$

Ecuación 8. Círculo de Error Probable al 95% con una sigma

$$CEP_{95} = 2.44774 * 0.5 * (\sigma_{\phi} + \sigma_{\lambda}) = \frac{2.44774}{2} (\sigma_{\phi} + \sigma_{\lambda})$$

$$CEP_{95} = 1.22387(\sigma_{\phi} + \sigma_{\lambda})$$

Ecuación 9. CEP₉₅ con sigmas de latitud y longitud

Donde:

1.2238 es el factor de expansión.

σ_{ϕ} es la desviación estándar de la latitud.

σ_{λ} es la desviación estándar de la longitud.

III.2 EPV₉₅

La Exactitud de Posicionamiento Vertical (EPV) es un estadístico para representar la exactitud de los datos captados (altura) con tecnología GNSS en el que se tiene un porcentaje de probabilidad de que se encuentre el valor verdadero. Expresa el grado de confiabilidad de la coordenada vertical para su explotación con fines geodésicos y geográficos, así como para evaluar la calidad de productos derivados.

Es el estadístico empleado para representar la exactitud de posicionamiento vertical de un punto en el intervalo de confianza del 95% se expresa mediante la siguiente relación.

$$EPV_{95} = 1.96(\sigma_h)$$

Ecuación 10. CEP₉₅ con sigmas de latitud y longitud referido en la NTEEP

Donde:

1.96 es el factor de expansión (valor de la variable aleatoria z en una tabla de distribución normal estándar con parámetros (0, 1), que corresponde a una probabilidad de 0.95, (ver figura 8)

σ_h es la desviación estándar de la altura.

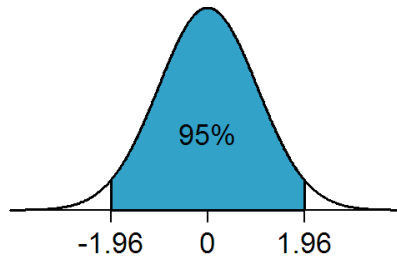


Figura 8. Distribución Normal Estándar. Fuente: internet

La función de densidad $f(x)$ depende de los parámetros μ y σ , debido a esto hay un número infinito de variables normales caracterizadas por los valores de μ y σ ; es decir, $f(x)$ no tiene función primitiva (ecuación 11), lo que significa que no existe expresión analítica para la Función de Distribución $F(x)$ y, en consecuencia, la función de densidad de la normal aparece en forma de tablas o programada por métodos numéricos (Lara, 2023)

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Ecuación 11. Área bajo la curva normal

La distribución normal se estandariza mediante la siguiente ecuación:

$$Z_i = \frac{(X_i - \mu)}{\sigma}$$

Ecuación 12. Variable transformada Z

Donde X_i es una variable aleatoria distribuida normalmente con una media μ y una desviación estándar σ .

Mediante métodos numéricos se obtiene la tabla (Figura 9) de distribución normal estándar para los valores de Z de donde se obtiene el percentil correspondiente al indicador EPV95.

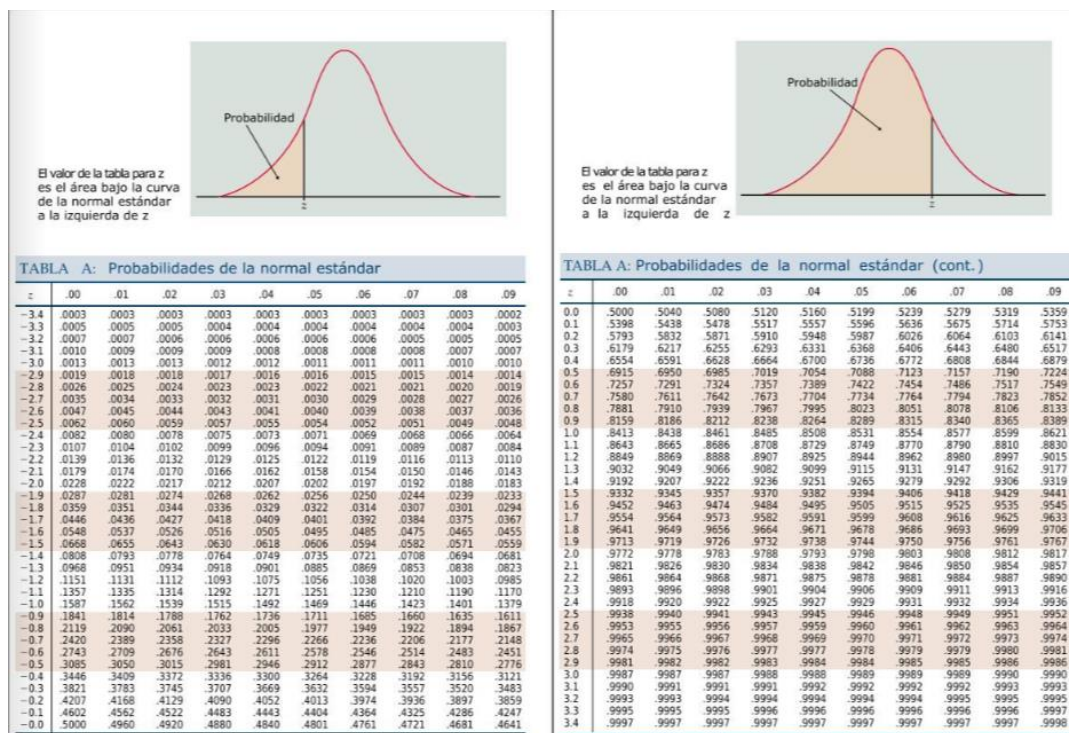


Figura 9. Tabla de probabilidades de la normal estándar. Fuente: internet

Consideraciones para el indicador CEP₉₅:

Reyes y Hernández (INEGI, 2002) mencionan que en la topografía y otras ciencias la propagación de los errores está en función de las medidas de campo y están expresadas como una función matemática. Por lo tanto, si las mediciones de campo tienen errores, es inevitable que las cantidades calculadas también los contengan; además, si estas medidas se usan para calcular otras cantidades también se verán afectadas por errores.

En función de lo anterior el área responsable del indicador determinó que:

- Cuando las coordenadas de una EH o un Pfe (PCT o Pec), se vincule o ligue directamente con estaciones de la Red Geodésica Nacional Activa (RGNA) se usará la ecuación 9. Ejemplo:

Estación o Pfe	$\sigma\Phi$	$\sigma\lambda$	$CEP_{95}=1.2238*(\sigma\Phi+\sigma\lambda)$
CAM_003	0.002	0.004	0.007

- En levantamientos geodésicos con GNSS, cuando las coordenadas de una EH o un Pfe (PCT o Pec), se relacione o ligue directamente con puntos distintos a la RGNA se le agregará el CEP₉₅ de las coordenadas de la estación de referencia, conforme ecuación 13.

$$CEP_{95} = 1.2238(\sigma\Phi + \sigma\lambda) + CEP_{95}(\text{estación de referencia})$$

Ecuación 13. CEP₉₅ propagado

Ejemplo:

Estación o Pfe	$\sigma\Phi$	$\sigma\lambda$	$1.2238*(\sigma\Phi+\sigma\lambda)$	$CEP_{95} \text{ referencia}$ (EH o Pfe)	$CEP_{95}=[1.2238*(\sigma\Phi+\sigma\lambda)]+CEP_{95}(\text{referencia})$
CAM_004	0.003	0.004	0.009	0.007 (CAM_003)	0.016

Consideraciones para el indicador EPV₉₅:

En función de lo anterior el área responsable del indicador determinó que:

- Cuando las alturas de una EH o un Pfe (PCT o Pec), se vincule o ligue directamente con estaciones de la Red Geodésica Nacional Activa (RGNA) se usará la ecuación 10. Ejemplo:

Estación o Pfe	σh	$EPV_{95}=1.9600*(\sigma h)$
CAM_003	0.013	0.025

- En levantamientos geodésicos con GNSS, cuando las alturas de una EH o un Pfe (PCT o Pec) se relacione o ligue directamente con puntos distintos a la RGNA se le agregará el EPV₉₅ de la altura de la estación de referencia, conforme a la ecuación 15.

$$EPV_{95} = 1.9600(\sigma h) + EPV_{95}(\text{estación de referencia})$$

Ecuación 14. EPV₉₅ para EH (RGNP) o Pfe

Ejemplo:

Estación o Pfe	σh	$1.9600*(\sigma h)$	$EPV_{95} \text{ referencia}$ (EH o Pfe)	$EPV_{95}=1.9600*(\sigma h) + EPV_{95} \text{ referencia}$
CAM_004	0.019	0.037	0.025 (CAM_003)	0.062

IV. Resultados del cálculo de los indicadores

CEP₉₅

Mediante software Excel se calculó el indicador CEP₉₅ de cinco polígonos en la Península de Yucatán (Tabla 1).

Tabla 1. Cantidad de PCT por polígono

Polígono	Cantidad PCT
Campeche	142
Cancún	218
Escárcega	223
Mérida	222
Palenque	211

Las estadísticas de tendencia central del indicador CEP₉₅ para cada polígono se observan en la siguiente tabla.

Tabla 2. Medidas de tendencia central (CEP₉₅) de cada polígono

Polígono	n	media	moda	mediana
Campeche	142	0.0109	0.0120	0.0110
Cancún	218	0.0118	0.0090	0.0110
Escárcega	223	0.0193	0.0190	0.0190
Mérida	222	0.0128	0.0110	0.0120
Palenque	211	0.0203	0.0210	0.0200
Total de PCT	1 016	0.0153	0.0120	0.0150

Las estadísticas de tendencia central pueden ser útiles en el análisis del resultado de los levantamientos geodésicos en áreas geográficas con diferentes condiciones climáticas y orográficas.

Los cálculos CEP₉₅ para los polígonos Campeche, Cancún, Escárcega, Mérida y Palenque se encuentran en archivos anexos.

EPV₉₅

Mediante software Excel se calculó el indicador EPV₉₅ de cinco polígonos en la Península de Yucatán (Tabla 1).

Las estadísticas de tendencia central del indicador EPV₉₅ para cada polígono se observan en la siguiente tabla.

Tabla 3. Medidas de tendencia central (EPV₉₅) de cada polígono

Polígono	n	media	moda	mediana
Campeche	142	0.0446	0.0410	0.0415
Cancún	218	0.0477	0.0330	0.0450
Escárcega	223	0.0766	0.0630	0.0760
Mérida	222	0.0561	0.0470	0.0560
Palenque	211	0.0843	0.0900	0.0850
Total PCT	1 016	0.0630	0.0450	0.0615

Los indicadores CEP₉₅ y EPV₉₅ son útiles para monitorear el comportamiento de las exactitudes posicionales de datos geodésicos establecidos y/o medidos en el territorio nacional, así como servir de soporte para la evaluación de diversos productos cartográficos.

Los cálculos EPV₉₅ para los polígonos Campeche, Cancún, Escárcega, Mérida y Palenque se encuentran en archivos anexos.

V. Bibliografía

- Federal Geodetic Control Subcommittee (1998) Geospatial Positioning Accuracy Standards. Part 1: Reporting Methodology. URL: <https://www.fgdc.gov/standards/projects/accuracy/part1/chapter1>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2022). *Aseguramiento de la calidad: indicadores y herramientas*. URL: <https://www.inegi.org.mx/infraestructura/aseguramiento/>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2017). *Diccionario de Datos Geodésicos*. URL: <https://www.inegi.org.mx/app/biblioteca/ficha.html?upc=702825092016>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2015). *Guía Metodológica para la Generación e Integración de Metadatos Geográficos conforme a la Norma Técnica para la elaboración de Metadatos Geográficos* (NTM). URL: <https://www.inegi.org.mx/app/biblioteca/ficha.html?upc=702825076962>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2017) *Guía metodológica de la Red Geodésica Horizontal* 2017. URL: <https://www.inegi.org.mx/app/biblioteca/ficha.html?upc=702825095376>
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2010). *Norma Técnica para la elaboración de Metadatos Geográficos*. URL: https://www.snieg.mx/Documentos/Normatividad/Vigente/Norma_Tecnica_para_la_elaboracion_de_Metadatos_Geograficos.pdf
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2010). *Norma Técnica de Estándares de Exactitud Posicional*. URL: https://www.snieg.mx/Documentos/Normatividad/Vigente/Norma_Tecnica_de_Estandares_de_Exactitud_Posicional.pdf
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2010). *Norma Técnica para el Sistema Geodésico Nacional*. URL: https://www.snieg.mx/Documentos/Normatividad/Vigente/Norma_Tecnica_para_el_Sistema_Geodesico_Nacional.pdf
- Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2002). *Tratamiento de Errores en levantamientos topográficos*. 2002. URL: https://www.inegi.org.mx/contenido/productos/prod_serv/contenidos/espanol/bvini/inegi/productos/historicos/380/702825001383/702825001383_1.pdf
- Instituto Panamericano de Geografía e Historia (2019). *Guía para la Evaluación de la Exactitud Posicional de Datos Espaciales*. Pub. 557, URL: http://publicaciones.ipgh.org/publicaciones-ocasionales/Guia_Evaluacion_Exactitud_Posicional_Datos_Espaciales.pdf
- Lara-Porras, Ana María (2023) Tema 7 Algunas distribuciones continuas. *Universidad de Granada*. <https://wpd.ugr.es/~bioestad/bioestadistica/tema-7/>
- mettatec (2023) *RINEX: El formato de intercambio de datos del sistema global de navegación por satélite*. URL: <https://mettatec.com/es/formato-rinex/>

- Moran, James Edward Jr., "Probable Circular Error (CEP) of Ballistic Missiles" (1966). All Graduate Theses and Dissertations. 6805. <https://digitalcommons.usu.edu/etd/6805>
- Ruiz-Lendínez JJ, Ariza-López FJ, Ureña-Cámara MA. (2019) Study of NSSDA Variability by Means of Automatic Positional Accuracy Assessment Methods. *ISPRS International Journal of Geo-Information*. 8(12):552. <https://doi.org/10.3390/ijgi8120552>
- Sánchez, M. (s. f.) La distribución Rayleigh. URL: https://www.academia.edu/9557933/LA_DISTRIBUCIÓN_DE_RAYLEIGH
- Sickle, Jan Van (2015). *GPS for Land Surveyors*. URL: <https://easyengineering.net/gps-for-land-surveyors-by-jan-van-sickle/>
- Webb, D.W. (2012) *Circular Probable Error for Circular and Noncircular Gaussian Impacts*. URL: <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/AD1043284.pdf>